

Математические модели

Математическая модель — это знаковая модель, отображающая объект-оригинал на языке математики. Унифицированным языком математики является язык теории множеств, который имеет кардинальные отличия от языка естественного. В математической теории не только следствия находятся в однозначном соответствии с принятыми предпосылками, но имеется такое же взаимоднозначное соответствие между термином и обозначенным этим термином объектом. Математический объект всегда выведен из-под времени. Слова же естественного языка, в противоположность языку математики, не изменяясь по написанию, могут ассоциироваться с различными образами в сознании различных людей и в сознании отдельного человека, под влиянием, например, его кругозора ³.

Понятие математической модели многоаспектное. Так с позиций математики под математической моделью понимают некоторую совокупность специфических (математических) объектов, свойства которых и отношения между которыми удовлетворяют определенной системе аксиом. В теории моделей понятие моделью (или алгебраическая система) связывают с некоторым множеством математических объектов, на котором задана определенная совокупность операций ¹.

Почему в познавательной деятельности доминируют математические модели, ведь известно, что лежащие в основе математического моделирования собственно математика и логика не имеют непосредственного отношения к каким-то конкретным структурам внешнего мира? По-видимому, дело в том, что использование математики отражает возможности когнитивной системы человека, в частности, его способности генерировать идеальные понятия и концептуальные системы. Кстати, именно поэтому, как отмечено в работе ², математику стали рассматривать не только и не столько, как науку о числах, пространстве и т.д., а как науку об идеальных математических структурах

нашего знаково-символического мышления, свойства которых она описывает с помощью аксиоматических теорий.

Математические формализмы не являются частью физических, экономических или социальных гипотез, они «нейтральны» по отношению к их содержанию и сами по себе не обладают специально-научным эмпирическим смыслом (интерпретацией). Важно понимать и постоянно помнить, что они могут быть частью только математических теорий, и применимы к описанию реальности опосредованно. Поэтому формальные системы непосредственно неприменимы к внешней, «внемыслительной» реальности.

Используя для обозначения некоторых (исходных) понятий данной предметной области математические понятия, т.е. придавая последним определенные смыслы, мы затем проводим с ними необходимые по нашему убеждению математические преобразования. При этом формальная достоверность используемых математических преобразований (и, следовательно, выводов) лежит в основе нашей уверенности в том, что полученные таким образом результаты также должны иметь соответствующие смыслы³.

Данное положение не отвергает необходимости эмпирической проверки результатов, полученных при помощи математического моделирования, более того она необходима. Причем речь идет о том, что проверяются именно физические реалии, а не математические формализмы, обеспечивавшие их описание, поскольку предполагается, что математические преобразования выполняются с позиций математики верно.

Помимо этого важнейшего обстоятельства следует отметить, что использование в целях моделирования именно математических моделей имеет еще и множество достаточно очевидных конкретных преимуществ. Введение математического языка обеспечивает строгую формулировку, как используемых понятий, так и логики описания объекта рассмотрения,

приводит к более целостной постановке проблемы и выступает, в дальнейшем, информационно-технологическим инструментом ее разрешения. Кроме того, математические модели, сводя поставленные задачи к решению задач математических, позволяют решать не только текущие прикладные задачи, исследовать реалии мира, но и с определенным уровнем обоснованности прогнозировать то, относительно чего еще нет экспериментальных данных.

Из вербального описания, как правило, сложно понять основные допущения, при которых словесная модель остается справедливой. Как следствие, характерной чертой разработчиков вербальных моделей являются постоянные дискуссии о терминологии, порой становящиеся более значимыми, чем само обсуждение предмета исследования. Вербальное описание объекта, которое также иногда называют моделированием, строится на основе цепочки более или менее очевидных утверждений естественного языка и не способно привести к столь же четким и однозначным выводам, что обеспечивает математическая модель. Добавим, что причиной неоднозначной интерпретации вербальных описаний является и сравнительно частая (по сравнению с математикой) смена аксиоматики гуманитарных наук ¹.

Математические же формализмы позволяют выявить скрытую потенциально содержащуюся в теоретических объектах наук (главным образом эмпирических) концептуальную информацию, поскольку дают возможность вычислить эмпирически проверяемые параметры и величины, получить новые следствия из научных теорий и гипотез.

Наличие достаточно адекватной математической модели позволяет установить взаимосвязь между различными характеристиками объектов рассмотрения, а также количественно описывать влияние одних факторов на другие. На сегодняшний день только математические модели могут обеспечить возможность широкого применения вычислительной техники для всестороннего исследования модели (а опосредованно и самого объекта рассмотрения), вплоть до получения новых знаний. В частности, могут быть

найденны ответы на вопросы касающиеся структуры и описания функционирования объекта моделирования, не говоря уже о таких традиционных задачах, как определение значений характеристик объекта на различных режимах его функционирования, в том числе и оптимального, проведении исследований прогнозного характера и т.д.

Как уже отмечалось, в процессах построения математической модели непременно присутствует субъект моделирования, лицо, усилиями и в интересах которого разрабатывается модель. Ранее роль субъекта в прикладных математических построениях не подчеркивалась. По мере перехода к исследованию все более сложных систем, роль субъекта постоянно возрастает и очень часто оказывается решающей, ибо именно его цели, интересы и предпочтения позволяют сформировать именно ту, а не иную модель.

Между тем следует понимать, что, с одной стороны, именно универсальность математических формализмов, как идеальных структур нашего знаково-символического мышления, обуславливает взаимосвязь различных направлений науки, а по сути дела и единство научного знания¹. С другой стороны за это приходится платить снижением уровня адекватности математической модели, многими иными нюансами, которыми может быть богата исходная вербальная постановка. С позиций рассматриваемой тематики можно добавить, что реализация процесса построения модели, часто способствует преобразованию исходной слабоструктурированной проблемы в хорошо структурированную проблему, а значит, обеспечивает возможность применения математического моделирования.

По мере развития науки в целом и компьютерной техники в особенности математическое моделирование (как исследования, проводимые над математическими моделями) становится одним из основных способов познания. Соответственно, как отражение накопленного опыта, написано огромное количество работ, посвященным технологиям построения

математических моделей и их последующего использования. В сжатой форме эти результаты целесообразно отразить в некоторой совокупности принципов. Несомненно, что математическое моделирование в значительной мере творческий процесс, и каждый автор в той или иной мере вносит свое видение в состав этих принципов, все же целесообразно придерживаться выработанных практикой, по крайней мере, следующих принципов.

- Принцип информационной достаточности. При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе, при достижении которого может быть построена ее достаточно адекватная модель. Поэтому при построении модели следует использовать ту информацию, которая требуется в соответствии с разрабатываемым алгоритмом, что принципиально противоположно подходу: "сначала сбор информации, а затем построение алгоритма по обработке этой информации". Это есть следствие принципа формирования системы на основе пространственно-временного целедостигающего процесса ее функционирования.
- Принцип инвариантности информации. Данный принцип означает, что входная информация должна быть независима от параметров моделируемой системы. Иначе говоря, модель должна работать без коррекции в некотором диапазоне значений входной информации.
- Принцип осуществимости. Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля и за конечное время.
- Принцип множественности. Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Поэтому для более

полного исследования модели часто используют ряд моделей, позволяющих с разных сторон отражать рассматриваемый процесс.

- Принцип преемственности. Каждая последующая модель не должна нарушать свойств объекта, полученного на предыдущих этапах или при использовании других моделей.
- Принцип агрегирования. В большинстве случаев сложный объект можно представить состоящим из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Этот принцип позволяет достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования ¹.
- Принцип параметризации. В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе относительно изолируемые подсистемы, характеризующиеся определенным параметром. Такие системы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. Данный принцип позволяет сократить объем и продолжительность моделирования, но существенно снижает адекватность модели.

Эффективная реализуемость предполагает соответствие точности исходных данных, точности решения задачи и точности, предъявляемой к искомому решению. В этой связи следует заметить, что нахождение математически оптимальных решений для практики часто иллюзорно.

Степень реализации перечисленных принципов в каждой конкретной модели может быть различной и зависит как от пожеланий и возможностей разработчика следовать им в процессе моделирования.

Наибольшего успеха математическое моделирование достигло в естественнонаучной и технической сферах. Однако при моделировании объектов, где существенную роль играет «человеческий фактор», успехи

весьма скромные. Анализируя сложившуюся здесь ситуацию, в работе ² отмечаются следующие названные неустранимыми причины

1. Для социальных объектов не установлены законы, позволяющие количественно описывать взаимосвязи между социальными переменными.

2. Проблематичными являются попытки добыть информацию, имеющую достаточный уровень точности. Субъекты, как поставщики информации, не выполняют требованиям, предъявляемые к процедурам измерения (далеко не всегда откровенно и однозначно дают необходимые сведения, по не всегда понятным причинам меняют свое мнение и т.п.). Тем самым получаемые зависимости весьма уязвимы для критики.

3. Изучаемые социологией явления столь сильно зависят от объема рассматриваемой общности, места и времени измерений, что говорить о проведении повторных измерений при одних и тех же условиях не приходится. Каждая выборка в том или ином роде является уникальной, что не позволяет построить с достаточной степенью достоверности никаких аналитических зависимостей.

В целом эти и ряд других особенностей социальных объектов, это процессы, происходящие в самых различных человеческих сообществах, не обеспечивают выполнения профессиональных требований математического моделирования являющихся на сегодняшний день общепризнанным. Это, в первую очередь, четкая формулировка основных понятий и предположений, апостериорный анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и компьютерных программ ¹. Имеется даже мнение, что современная математика в принципе не может обеспечить построение достаточно адекватных моделей социальных объектов.

Наряду с этим имеет место и прямо противоположные случаи, когда бездумное следование этим требованиям иногда приводит к курьезным ситуациям. Исследователи гуманитарных проблем, не обладая достаточным

уровнем математической подготовки, зачастую необоснованно используют готовый математический аппарат, а потом, защищая свои результаты, апеллируют к тому, что использовали «непогрешимую» математику. Следует понимать, что любой математический аппарат имеет четко очерченные границы своей применимости. Число примеров тому огромно. Вот только два из них: применение линейных моделей для описания принципиально нелинейных процессов (когда их линеаризация не правомерна), использование теории вероятностей, когда не выполнены условия массовости данного явления, которое должно происходить в одинаковых условиях. Не будем здесь обсуждать и многочисленные примеры ухищрений, направленных на обход запрета на нарушения фундаментальных законов природы.

Мы являемся очевидцами формирования нового этапа в развитии цивилизации – этап построения информационного общества. Наблюдаемый прогресс средств переработки, передачи и хранения информации столь сильно меняет весь облик человеческой деятельности, что термин информация приобретает образ фетиша (главное – владеть информацией, все решает своевременность, адекватность и полнота имеющейся информации, тот, кто владеет информацией – владеет миром и т.п.). Однако следует понимать, что для эффективного использования информации она должна иметь вид знаний. Переработка информации как сырья в информацию как знания в значительной мере осуществляется при помощи математического моделирования. Именно поэтому некоторые авторы считают, что математическое моделирование может и должно быть интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества ¹.

Принципиальным моментом в развитии методологии математического моделирования стало использование идей системного подхода. Дело в том, что при моделировании сложных объектов, рассматриваемых как системы, их модели целесообразно формировать также как системы ². В этой связи различают два основных методологических подхода к построению моделей:

традиционный (классический или индуктивный) и системный. В основе первого лежит структурно-функциональный подход (т.е. примат структуры над функцией), в основе второго - функционально-структурный подход (т.е. примат функции над структурой). Рассмотрим их суть, опираясь на работу ³.

Суть классического подхода заключается в том, что объект моделирования разбивается на отдельные части (обычно существующие структурные компоненты), а затем формализуется их непосредственное описание и описание связей между ними. На рис.2 представлена условная схема классического подхода. В результате проведенных обследований объекта фиксируются сведения (исходные данные), которые разбивают на группы, относящиеся к отдельным частям объекта моделирования. Поскольку каждая часть выполняет возложенные на нее функции, то могут быть сформулированы так называемые частные цели. Для достижения каждой частной цели формируется некоторый компонент будущей модели, совокупность которых и образует модель.

В результате формируется модель, состоящую из отдельных компонентов, вообще говоря, изолированных друг от друга частей модели, каждая из которых призвана решать свои собственные задачи, руководствуясь соответствующими критериями. Для получения согласованного функционирования объекта моделирования должны быть предусмотрены некоторые интегрирующие (координирующие) механизмы.

Итак, при классическом подходе реализуется *движение от частного к общему, и создаваемая модель образуется путем объединения отдельных ее компонентов*. В результате формируется модель, в которой не предусмотрено возникновение системного эффекта ⁴.

При построении модели с позиций системного подхода реализуется индуктивный подход. Во-первых, моделируемый объект рассматривается в качестве подсистемы некоторой системы более высокого уровня (надсистемы). Поэтому вначале реализуется этап макро моделирования: с позиций

поставленной задачи строится модель внешней среды, чтобы выявить ограничения на систему со стороны надсистемы, сформулировать цель моделируемой системы и критерии степени ее достижения. Анализ ограничений, которые задаются надсистемой, позволяет сформулировать исходные требования к модели с позиций ее функционирования и проявления соответствующих свойств. Эти требования становятся основой для формирования будущих подсистем. Следующий этап (см. рис.3) – этап микромоделирования - осуществляется формирование компонентов системы. Субъект моделирования выявляет элементы системы, как участников целедостигающего процесса направленного на достижение поставленных целей и, руководствуясь имеющимися критериями, выбирает вариант построения собственно модели системы.

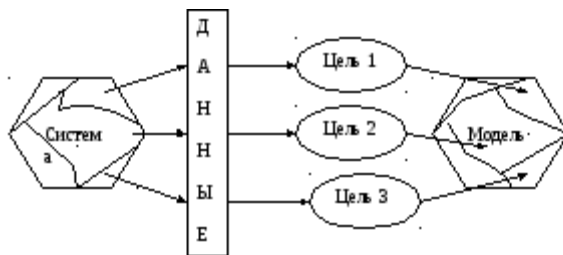


Рис.2. Традиционный (структурно-функциональный подход) построения модели

Функционально-структурный подход позволяет добиться весьма высокого уровня адекватности модели объекту моделирования, поскольку, даже создавая модель из компонентов, она представляет собой единое целое, ориентированное на достижение поставленной цели. Характерными особенностями этого подхода также являются:

- учет диалектической взаимосвязи функций и структуры системы при определяющей роли функций;
- целостный подход к анализу и синтезу многоуровневых объектов;
- учет взаимосвязей исследуемого объекта и его окружения;

- рассмотрение объекта в развитии и другие.

Моделирование в той или иной мере присутствует во всех видах деятельности людей. При этом по мере развития математики и информационных технологий все в большей мере используется моделирование математическое. Следует понимать, что, будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, оно дает новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки.

Конечно же, математическое моделирование плодотворно лишь при выполнении хорошо известных профессиональных требований: четкая формулировка основных понятий и предположений, апостериорный анализ адекватности используемых моделей, гарантированная точность вычислительных алгоритмов и т.д. Если же говорить о моделировании так называемых трудноформализуемых объектов, то к этим требованиям необходимо добавить аккуратное разграничение математических и житейских терминов (звучащих одинаково, но имеющих разный смысл), осторожное применение уже готового математического аппарата к изучению явлений и процессов (предпочтителен, например, путь "от задачи к методу", а не наоборот) и ряд других ¹.

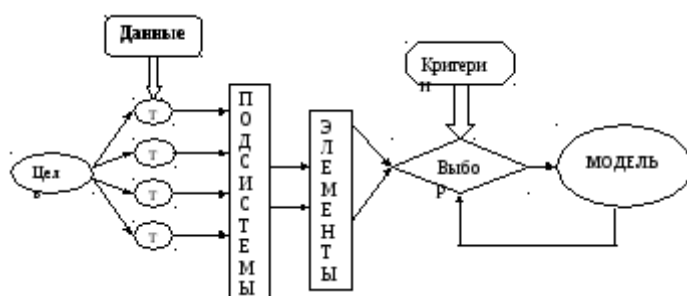


Рис.3. Системный (функционально-структурный) подход построения модели.

Анализируя успехи математического моделирования, можно выявить интересное противоречие, хорошо сформулированное в работе ² На основе

специфичной технологии манипулирования с информацией человек научился из весьма широкого множества информационных характеристик (показателей), описывающих сложные объекты и явления, выделять небольшое число, так называемых, существенных характеристик и на их основе строить "упрощенные" образы – информационно-логические модели, весьма близкие по своему содержанию к тому или иному аспекту функционирования и развития оригиналов.

После замены "очевидных" свойств окружающих нас сложных объектов строгими, но упрощенными по отношению к исходному (природному) явлению научными формулировками – математическими моделями возникает возможность точного расчета, описания, предсказания. Важно отметить, что при этом модель играет системообразующую и смыслообразующую роль в научном познании, позволяет понять явление, структуру изучаемого объекта, установить связь причины и следствия между собой. Это означает, что модель позволяет определить причины явлений, характер взаимодействия её составляющих, связывая причины и следствия через математические отношения ¹. Правда, это работает только в ограниченной области применения – пока справедливы те исходные упрощающие предположения, на основе которых модель строилась.

В этом парадоксальная особенность науки – исключительная точность, вызванная к жизни принципиально неточными, приближенными, по своей сущности годными только в определенной области явлений, моделями реального.

Эффективность применения идеальных образов в виде абстрактных моделей лежит в основе позитивных достижений науки, а противоречия сопряжения реального и его моделей неукоснительно заставляют человека неустанно искать новые абстрактные модели, разрешающих в какой-то мере эти противоречия.

Противоречие между уровнем возможного научного описания сложного в виде абстрактного простого, и, наоборот, обыденного простого в виде сложного конкретного, порождает множество коллизий, надежд, заблуждений и фантазий. Чтобы понять, в чем причина таких парадоксальных противоречий целесообразно обратиться к общей теории систем и одному из ее приложений - системному анализу, выявить их и роль при построении абстрактных моделей, а также роли и места в нем математики.